

**ΔΙΑΔΟΣΗ ΘΡΑΥΟΜΕΝΩΝ ΚΥΜΑΤΩΝ ΠΑΝΩ ΑΠΟ ΕΠΙΠΕΔΟ
ΠΥΘΜΕΝΑ ΣΤΑΘΕΡΗΣ ΚΛΙΣΗΣ ΜΕΣΩ ΜΕΘΟΔΟΥ
ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ ΜΕΓΑΛΩΝ ΚΥΜΑΤΩΝ**

Γεράσιμος Κολοκυθάς*, Αθανάσιος Δήμας

Εργαστήριο Υδραυλικής Μηχανικής, Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών,
Πανεπιστήμιο Πατρών, 26500 Πάτρα

*Στοιχεία επικοινωνίας: gkolokithas@upatras.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα εργασία παρουσιάζονται οι αριθμητικές προσομοιώσεις τρισδιάστατης, συνεκτικής, τυρβώδους ροής με ελεύθερη επιφάνεια, η οποία προκύπτει από τη διάδοση και θραύση μη-γραμμικών κυμάτων πάνω από επίπεδο πυθμένα σταθερής κλίσης. Βασικός στόχος της εργασίας είναι η ενδελεχής διερεύνηση του φαινομένου της θραύσης (εκχείλισης) και των συνεπαγόμενων κυματογενών ρευμάτων, κάνοντας χρήση της μεθόδου προσομοίωσης μεγάλων κυμάτων (LWS). Η μεθοδολογία LWS στηρίζεται στο διαχωρισμό των κλιμάκων της ταχύτητας και της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας σε πλήρως επιλυόμενες και σε υποπλεγματικές κλίμακες, για τις οποίες εφαρμόζεται μοντέλο τάσεων, αντίστοιχο της μεθόδου των μεγάλων δινών (LES). Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα του μοντέλου με σχετικά αποτελέσματα πειραματικών μετρήσεων προκύπτει ότι, σε γενικές γραμμές, οι προβλέψεις του είναι επαρκείς όσον αφορά τα χαρακτηριστικά της θραύσης - βάθος και ύψος - και τη μείωση του ύψους κύματος στη ζώνη απόσβεσης.

**LARGE-WAVE SIMULATION OF BREAKING WAVE
PROPAGATION OVER CONSTANT SLOPE BED**

Gerasimos Kolokythas*, Athanassios Dimas

Laboratory of Hydraulic Engineering, Department of Civil Engineering,
University of Patras, 26500 Patras

*Corresponding author: gkolokithas@upatras.gr

ABSTRACT

In the present study, the three-dimensional, incompressible, turbulent, free-surface flow, developing by the propagation of nonlinear breaking waves over a constant slope, rigid bed is numerically simulated. The main objective is to investigate in depth, the process of spilling wave breaking and the characteristics of the developing undertow current employing the Large-Wave Simulation (LWS) method. According to LWS methodology, large velocity and free-surface scales are fully resolved, and subgrid scales are treated by an eddy viscosity model, similar to Large-Eddy Simulation (LES) methodology. The comparison of present numerical results to corresponding experimental results of other researchers, indicate that the numerical model predicts adequately the wave breaking parameters - breaking height and depth - and the wave dissipation in the surf zone.

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα θαλάσσια κύματα στην παράκτια ζώνη βρίσκονται σε διαρκή αλληλεπίδραση με τον πυθμένα, με αποτέλεσμα την εμφάνιση μιας σειράς σημαντικών διεργασιών, όπως η θραύση των κυμάτων, η δημιουργία κυματογενών ρευμάτων και η μεταφορά ιζήματος. Η θραύση των κυμάτων συμβαίνει όταν το ύψος ή/και η παραμόρφωση του κύματος υπερβούν κάποιες κρίσιμες τιμές, καθώς το βάθος του νερού μειώνεται. Οι βασικές κατηγορίες θραύσης είναι τρεις: η θραύση εκχείλισης, εκτίναξης και εφόρμησης. Η ταξινόμηση τους γίνεται με βάση τον αριθμό Iribaren, οποίος εξαρτάται από την κλίση του πυθμένα και την κυρτότητα του κύματος. Πρακτικά, η θραύση εκχείλισης απαντάται σε πυθμένες ήπιας κλίσης, η θραύση εκτίναξης σε μέτριας και απότομης κλίσης, ενώ η θραύση εφόρμησης σε περιπτώσεις πολύ απότομων κλίσεων. Όσον αφορά τη θραύση εκχείλισης, αυτή χαρακτηρίζεται από τη δημιουργία του αποκαλούμενου επιφανειακού στροβίλου στο μέτωπο του θραυόμενου κύματος, αμέσως μετά την έναρξη του φαινομένου.

Η θραύση του κύματος είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με την εμφάνιση κυματογενών ρευμάτων, ενός παράλληλου στην ακτογραμμή, το οποίο εμφανίζεται όταν η κατεύθυνση διάδοσης του θραυόμενου κύματος είναι μη-κάθετη στην ακτογραμμή, και ενός εγκάρσιου στην ακτογραμμή, το οποίο είναι γνωστό ως υποβρύχιο κυματογενές ρεύμα. Τα ρεύματα αυτά αναπτύσσονται εντός της ζώνης απόσβεσης, δηλαδή της περιοχής στην οποία αποσβένεται η ενέργεια του θραυόμενου κύματος. Το υποβρύχιο ρεύμα οφείλει την ύπαρξη του στο πεδίο διατμητικής τάσης που αναπτύσσεται στη ζώνη απόσβεσης, προκειμένου να ισορροπήσει τη βαθμίδα της πίεσης και τη μεταβολή της παροχής ορμής, εξαιτίας της κυματογενούς ανύψωσης και της μείωσης του ύψους κύματος. Η κατεύθυνσή του ρεύματος κοντά στον πυθμένα είναι προς τα βαθιά, ενώ κοντά στην ελεύθερη επιφάνεια είναι προς την ακτή, εξασφαλίζοντας ότι η συνολική παροχή ρευστού σε κάθε κατακόρυφη διατομή θα είναι μηδενική.

Το φαινόμενο της θραύσης κυμάτων στην παράκτια ζώνη έχει αποτελέσει αντικείμενο πολλών ερευνητών, οι οποίοι το προσέγγισαν, είτε με την ανάπτυξη αριθμητικών μοντέλων, είτε μέσω εργαστηριακών πειραμάτων. Οι Dimas & Dimakopoulos (2009) ανέπτυξαν αριθμητικό μοντέλο προσομοίωσης της θραύσης (εκχείλισης) κυμάτων το οποίο ενσωματώθηκε σε κώδικα προσομοίωσης δισδιάστατης μη-συνεκτικής ροής με ελεύθερη επιφάνεια που δημιουργείται από τη διάδοση κυμάτων πάνω από πυθμένα σταθερής κλίσης. Η σύγκριση των αποτελεσμάτων τους με σχετικά πειραματικά αποτελέσματα (Ting & Kirby, 1994) δείχνει ότι με κατάλληλη επιλογή κάποιων παραμέτρων το μοντέλο προβλέπει αρκετά ικανοποιητικά τα χαρακτηριστικά της θραύσης. Πιο πρόσφατα, προκειμένου να μελετήσουν την τυρβώδη ροή που δημιουργείται από τη θραύση κυμάτων πάνω από πυθμένα σταθερής κλίσης, οι Dimakopoulos & Dimas (2011), έκαναν χρήση της μεθόδου προσομοίωσης μεγάλων κυμάτων (LWS) σε σύζευξη με τον κώδικα μη-συνεκτικής ροής (Dimas & Dimakopoulos, 2009) για την περίπτωση τρισδιάστατου πεδίου ροής. Τα αποτελέσματα έδειξαν ικανοποιητική συμφωνία με τις αντίστοιχες πειραματικές μετρήσεις (Ting & Kirby, 1994, 1996), οι οποίες χρησιμοποιήθηκαν για τη βαθμονόμηση του μοντέλου.

Καινοτομία της παρούσας εργασίας αποτελεί η σύζευξη της μεθόδου προσομοίωσης LWS (Dimas & Fialkowski, 2000) με κώδικα αριθμητικής επίλυσης τρισδιάστατης συνεκτικής ροής, ώστε να δοθεί η δυνατότητα υπολογισμού των κυματογενών ρευμάτων, στον οποίο συνεισφέρει ουσιαστικά η παρουσία της διατμητικής τάσης στον πυθμένα. Συγκεκριμένα, παρουσιάζονται αριθμητικές προσομοιώσεις τρισδιάστατης ροής με ελεύθερη επιφάνεια, η οποία προκύπτει από τη διάδοση και θραύση μη-γραμμικών κυμάτων, εγκάρσια στην ακτογραμμή, πάνω από πυθμένα σταθερής κλίσης. Η μεθοδολογία LWS βασίζεται στο διαχωρισμό των κλιμάκων των μεταβλητών της ροής (ταχύτητα, πίεση και ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας) σε επιλυόμενες και υποπλεγματικές (SGS) κλίμακες. Κύριος σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η αντιμετώπιση των μειονεκτημάτων των προαναφερόμενων

εργασιών, στις οποίες γίνεται θεώρηση μη-συνεκτικής ροής. Σε πρώτη φάση, δηλαδή για την περίπτωση διάδοσης κάθετα στην ακτογραμμή, το σημαντικότερο από αυτά είναι η σωστή αποτύπωση του προφίλ του υποβρύχιου ρεύματος. Στις επόμενες ενότητες παρουσιάζονται κατά σειρά οι εξισώσεις που διέπουν τη ροή, τα κυριότερα στοιχεία της μεθοδολογίας LWS, η αριθμητική μέθοδος, τα αποτελέσματα της προσομοίωσης και τα κυριότερα συμπεράσματα.

2. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΡΟΗΣ

Η τρισδιάστατη, ασυμπίεστη ροή ελεύθερης επιφάνειας, για ρευστό σταθερής συνεκτικότητας, διέπεται από την εξίσωση συνέχειας

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.1)$$

και τις εξισώσεις Navier-Stokes

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\text{Re}_d} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (2.2)$$

όπου $i, j = 1, 2, 3$, t είναι ο χρόνος, x_1, x_2 οι οριζόντιες συντεταγμένες, x_3 η κατακόρυφη συντεταγμένη, u_1, u_2, u_3 οι συνιστώσες της ταχύτητας, p η δυναμική πίεση και Re_d ο αριθμός Reynolds. Οι εξισώσεις (2.1) και (2.2) εκφράζονται σε αδιάστατη μορφή με παραμέτρους αδιαστατοποίησης το βάθος εισόδου d_i , την επιτάχυνση της βαρύτητας g και την πυκνότητα του ρευστού ρ , επομένως $\text{Re}_d = (gd_i)^{1/2} d_i / \nu$, όπου ν είναι το κινηματικό ιξώδες του ρευστού.

Η κινηματική και η δυναμική συνθήκη ορθής τάσης στην ελεύθερη επιφάνεια, αντίστοιχα, είναι

$$u_3 = \frac{d\eta}{dt} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u_1 \frac{\partial \eta}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial \eta}{\partial x_2} \quad (2.3)$$

$$p - \frac{\eta}{\text{Fr}^2} - \frac{2}{\text{Re}_d} \left[\frac{\partial u_3}{\partial x_3} - \frac{1}{2} \frac{\partial \eta}{\partial x_1} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial \eta}{\partial x_2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \right] = 0 \quad (2.4)$$

όπου η είναι η ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας και Fr είναι ο αριθμός Froude, ο οποίος σύμφωνα με την αδιαστατοποιημένη διατύπωση των εξισώσεων ισούται με τη μονάδα, ενώ στην (2.4) έχει θεωρηθεί μηδενική ατμοσφαιρική πίεση. Η δυναμική συνθήκη, με την οποία επιβάλλεται ο μηδενισμός των διατμητικών τάσεων στην ελεύθερη επιφάνεια, εκφράζεται για καθεμία από τις οριζόντιες διευθύνσεις x_1 και x_2 , αντίστοιχα, ως εξής

$$2 \frac{\partial \eta}{\partial x_1} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) + \frac{\partial \eta}{\partial x_2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) - \left[1 - \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_1} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial \eta}{\partial x_1} \frac{\partial \eta}{\partial x_2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) = 0 \quad (2.5)$$

$$2 \frac{\partial \eta}{\partial x_2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} - \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) + \frac{\partial \eta}{\partial x_1} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) - \left[1 - \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_2} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial \eta}{\partial x_1} \frac{\partial \eta}{\partial x_2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) = 0 \quad (2.6)$$

Επιπλέον, η συνθήκη μη-ολίσθησης πυθμένα για τις οριζόντιες διευθύνσεις x_1 και x_2 , καθώς και η συνθήκη μη-διαπέρατοτητας είναι, αντίστοιχα

$$u_1 - u_3 \frac{\partial d}{\partial x_1} = 0, \quad u_2 - u_3 \frac{\partial d}{\partial x_2} = 0 \quad (2.7)$$

$$u_3 + u_1 \frac{\partial d}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial d}{\partial x_2} = 0 \quad (2.8)$$

όπου d είναι το βάθος πυθμένα μετρημένο από την αδιατάρακτη στάθμη της ελεύθερης επιφάνειας.

Οι καρτεσιανές συντεταγμένες μετασχηματίζονται, ώστε το υπολογιστικό πεδίο ροής να γίνει ανεξάρτητο του χρόνου, σύμφωνα με τις εξής εκφράσεις

$$s_1 = x_1, \quad s_2 = x_2 \quad \text{και} \quad s_3 = \frac{2x_3 + d - \eta}{d + \eta} \quad (2.9)$$

όπου στο μετασχηματισμένο πεδίο, η ελεύθερη επιφάνεια αντιστοιχεί σε $s_3 = 1$ και ο πυθμένας σε $s_3 = -1$. Με εφαρμογή της (2.9), οι εξισώσεις συνέχειας και Navier-Stokes (2.1) και (2.2) μετασχηματίζονται, αντίστοιχα, στις

$$\frac{\partial u_k}{\partial s_k} + \frac{2}{d + \eta} \left(\frac{\partial u_3}{\partial s_3} - r_k \frac{\partial u_k}{\partial s_3} \right) = 0 \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t} - \frac{1 + s_3}{d + \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} \frac{\partial u_i}{\partial s_3} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial s_k} + \frac{2}{d + \eta} \left(u_3 \frac{\partial u_i}{\partial s_3} - r_k u_k \frac{\partial u_i}{\partial s_3} \right) = \\ R_i + \frac{1}{\text{Re}_d} \left[\frac{\partial^2 u_i}{\partial s_k \partial s_k} + \frac{4(r_k^2 + 1)}{(d + \eta)^2} \frac{\partial^2 u_i}{\partial s_3^2} + V_i \right] \end{aligned} \quad (2.11)$$

όπου, εφεξής, $k=1,2$ και

$$R_k = -\frac{\partial p}{\partial s_k} + \frac{2}{d + \eta} r_k \frac{\partial p}{\partial s_3}, \quad R_3 = -\frac{2}{d + \eta} \frac{\partial p}{\partial s_3} \quad (2.12)$$

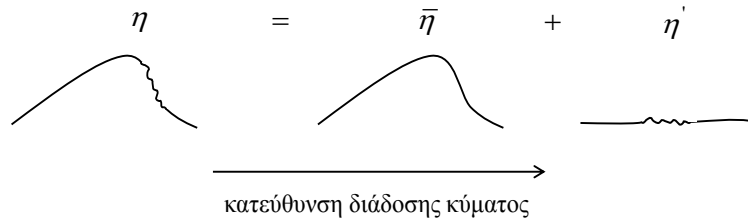
$$V_i = -\frac{2}{d + \eta} \left\{ 2r_k \frac{\partial^2 u_i}{\partial s_k \partial s_3} + \left[\frac{\partial r_k}{\partial s_k} - \frac{2}{(d + \eta)} r_k \frac{\partial r_k}{\partial s_3} \right] \frac{\partial u_i}{\partial s_3} \right\} \quad (2.13)$$

$$r_k = \frac{1 + s_3}{2} \frac{\partial \eta}{\partial s_k} - \frac{1 - s_3}{2} \frac{\partial d}{\partial s_k} \quad (2.14)$$

3. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ LWS

Όπως προαναφέρθηκε, με τη μέθοδο προσομοίωσης μεγάλων κυμάτων (LWS) επιτυγχάνεται ο διαχωρισμός των κλιμάκων της ροής σε επιλυόμενες και μη επιλυόμενες, ο

οποίος στηρίζεται στην εφαρμογή ενός χωρικού φίλτρου στις ταχύτητες, στην πίεση και στην ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας. Κατά συνέπεια, κάθε μεταβλητή της ροής, f , εκφράζεται ως το άθροισμα του επιλυόμενου, \bar{f} , και του υποπλεγματού τμήματος της, f' , όπως π.χ. φαίνεται στο Σχήμα 1 κατά το διαχωρισμό της ανύψωσης η . Το φιλτράρισμα της τελευταίας μεταβλητής αποτελεί και το σημείο διαφοροποίησης της μεθόδου LWS σε σχέση με τη μέθοδο LES.



Σχήμα 1: Διαχωρισμός των κλιμάκων ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας κατά τη θραύση εκχείλισης.

Οι εξισώσεις συνέχειας και Navier-Stokes για τις επιλυόμενες κλίμακες της ροής, προκύπτουν από τη διαδικασία του φιλτραρίσματος στις (2.10) και (2.11), και είναι, αντίστοιχα

$$\frac{\partial \bar{u}_k}{\partial s_k} + \frac{2}{d + \bar{\eta}} \left(\frac{\partial \bar{u}_3}{\partial s_3} - \bar{r}_k \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial s_3} \right) = 0 \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} - \frac{1 + s_3}{d + \bar{\eta}} \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial t} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial s_3} + \bar{u}_k \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial s_k} + \frac{2}{d + \bar{\eta}} \left(\bar{u}_3 \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial s_3} - \bar{r}_k \bar{u}_k \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial s_3} \right) = \\ \bar{R}_i + \frac{1}{\text{Re}_d} \left[\frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial s_k \partial s_k} + \frac{4(\bar{r}_k^2 + 1)}{(d + \bar{\eta})^2} \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial s_3^2} + \bar{V}_i \right] + \bar{T}_i \end{aligned} \quad (3.2)$$

όπου

$$\bar{T}_i = - \frac{\partial \tau_{ik}}{\partial s_k} - \frac{2}{d + \bar{\eta}} \frac{\partial \tau_{i3}}{\partial s_3} + \frac{1 + s_3}{d + \bar{\eta}} \frac{\partial \tau_{i3}^\eta}{\partial s_3} - \frac{1 - s_3}{d + \bar{\eta}} \frac{\partial \tau_{ik}}{\partial s_3} \frac{\partial d}{\partial s_k} \quad (3.3)$$

και περιλαμβάνει όλους τους όρους των υποπλεγματού (SGS) τάσεων, δηλαδή τις τάσεις δίνης και της τάσεις κύματος, οι οποίες, αντίστοιχα, είναι

$$\tau_{ij} = \overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j \quad (3.4)$$

$$\tau_{i3}^\eta = \overline{u_i u_k} \frac{\partial \eta}{\partial s_k} - \bar{u}_i \bar{u}_k \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial s_k} + \overline{u_i} \frac{\partial \eta}{\partial t} - \bar{u}_i \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial t} + \bar{p} \frac{\partial \eta}{\partial s_i} - \bar{p} \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial s_i} \quad (3.5)$$

Οι SGS τάσεις δίνης εμφανίζονται ακριβώς όπως και στη μεθοδολογία LES, σε αντίθεση με τις αντίστοιχες τάσεις κύματος, οι οποίες εμφανίζονται αποκλειστικά στη μεθοδολογία LWS.

Εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό (2.9) στις οριακές συνθήκες (2.3) - (2.8) για την ελεύθερη επιφάνεια ($s_3 = 1$) και τον πυθμένα ($s_3 = -1$) και στη συνέχεια τη διαδικασία

φιλτραρίσματος με τις προαναφερόμενες απλοποιητικές παραδοχές, προκύπτουν οι αντίστοιχες μετασχηματισμένες οριακές συνθήκες για τις επιλυόμενες κλίμακες.

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι κατά την εφαρμογή του φίλτρου στις (2.10) και (2.11) έγιναν απλοποιητικές παραδοχές, οι οποίες αναλύονται στη διδακτορική διατριβή Δημακόπουλος (2009, σελ. 55). Επίσης, φιλτράροντας τους συνεκτικούς όρους, προκύπτουν υποπλεγματικοί όροι, οι οποίοι μπορούν να θεωρηθούν αμελητέοι σε σχέση με τους υπόλοιπους όρους της εξίσωσης (3.2), επειδή διαιρούνται με σχετικά υψηλές τιμές του αριθμού Reynolds, και κατ' επέκταση αγνοούνται.

Στην παρούσα εργασία, οι SGS τάσεις δίνης και κύματος, οι οποίες εξαρτώνται από τις μη επιλυόμενες κλίμακες, προσομοιώνονται με τη χρήση μοντέλων τυρβώδους συνεκτικότητας (Rogallo & Moin, 1984). Συγκεκριμένα, το μοντέλο για τις τάσεις δίνης είναι

$$\tau_{ij} = -2\nu_\tau \bar{S}_{ij} = -2C^2 \Delta^2 |\bar{S}| \bar{S}_{ij} \quad (3.6)$$

όπου C είναι παράμετρος του μοντέλου με τιμή 0.1 (όπως συνήθως επιλέγεται και στη μεθοδολογία LES), $\Delta = (\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3)^{1/3}$ είναι το μέγεθος της μικρότερης επιλυόμενης κλίμακας με βάση τις διαστάσεις των κελιών του πλέγματος, S_{ij} είναι ο τανυστής του ρυθμού παραμόρφωσης για τις επιλυόμενες κλίμακες

$$\bar{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial s_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial s_i} \right) \quad (3.7)$$

και $|\bar{S}| = (\bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij})^{1/2}$ το μέτρο του. Το μοντέλο των τάσεων κύματος βασίζεται σε αυτό των Dimas & Fialkowski (2000) και ορίζεται, εντελώς ανάλογα με την (3.6), ως εξής

$$\tau_{ij}^\eta = -2\nu_\tau \bar{S}_{ij}^\eta = -2(C^\eta)^2 \Delta^2 |\bar{S}^\eta| \bar{S}_{ij}^\eta \quad (3.8)$$

όπου C^η είναι παράμετρος του μοντέλου και S_{ij}^η είναι ο παραμορφωμένος τανυστής του ρυθμού παραμόρφωσης για τις επιλυόμενες κλίμακες

$$\bar{S}_{ij}^\eta = \delta_{3j} S_{ik} \left| \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial s_k} \right| \quad (3.9)$$

όπου δ_{ij} είναι το δέλτα του Kronecker.

4. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ

Η αριθμητική επίλυση των εξισώσεων Navier-Stokes επιτυγχάνεται με χρήση κλασματικής μεθόδου ολοκλήρωσης σταθερού βήματος, όσον αφορά τη χρονική διακριτοποίηση και ενός υβριδικού σχήματος για τη χωρική διακριτοποίηση. Το υβριδικό σχήμα περιλαμβάνει διακριτοποίηση των εξισώσεων με χρήση κεντρικών πεπερασμένων διαφορών κατά την οριζόντια διεύθυνση s_1 , ψευδο-φασματικής προσέγγισης κατά Fourier στην οριζόντια διεύθυνση s_2 , και εφαρμογή ψευδο-φασματικής μεθόδου παρεμβολής με N πολυώνυμα Chebyshev κατά την κατακόρυφη διεύθυνση s_3 .

Οι μετασχηματισμένες εξισώσεις Navier-Stokes μπορούν να γραφούν ως εξής

$$\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} = \bar{A}_i - \partial_j^T \bar{\Pi} + \frac{1}{\text{Re}_d} \left[\Delta_j^T \bar{v}_i + \bar{V}_i \right] + \bar{T}_i \quad (4.1)$$

όπου $\bar{v}_i = \bar{u}_i - \delta_{3i} \bar{r}_k \bar{u}_k$, ο όρος \bar{A}_i περιλαμβάνει όλους τους μη-γραμμικούς όρους, ∂_j^T είναι ο μετασχηματισμένος τελεστής παραγωγίσης, $\bar{\Pi} = \bar{p} + 0.5(\bar{v}_j \bar{v}_j)$ είναι το μετασχηματισμένο ύψος πίεσης και Δ_j^T είναι ο μετασχηματισμένος τελεστής του Laplace.

Κάθε βήμα της χρονικής διακριτοποίησης πραγματοποιείται σε τρία στάδια, διαδικασία κατά την οποία το πεδίο ταχύτητας στο επόμενο χρονικό βήμα, υπολογίζεται προσθέτοντας διαδοχικά τις αντίστοιχες διορθώσεις καθενός από τα τρία αυτά στάδια, στο πεδίο του προηγούμενου χρονικού βήματος. Το πεδίο δυναμικής πίεσης λαμβάνεται στο δεύτερο στάδιο του κάθε χρονικού βήματος, ενώ η ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας υπολογίζεται από την κινηματική οριακή συνθήκη στο τέλος κάθε χρονικού βήματος.

Στο πρώτο στάδιο γίνεται χρήση ρητού σχήματος για τη διακριτοποίηση των μη-γραμμικών όρων \bar{A}_i , των SGS όρων \bar{T}_i και των όρων \bar{V}_i , των μετασχηματισμένων εξισώσεων (4.1). Στο δεύτερο στάδιο εφαρμόζεται ένα πεπλεγμένο σχήμα Euler για τον όρο του ύψους πίεσης, $\partial_j^T \bar{\Pi}$, όπου, λαμβάνοντας υπόψη την εξίσωση συνέχειας, προκύπτει η γενικευμένη εξίσωση Poisson για το μετασχηματισμένο ύψος πίεσης. Σε αυτό το στάδιο εφαρμόζονται η δυναμική οριακή συνθήκη ελεύθερης επιφάνειας και η συνθήκη αδιαπέρατου πυθμένα. Στο τρίτο και τελευταίο στάδιο του χρονικού βήματος, χρησιμοποιείται επίσης ένα πεπλεγμένο σχήμα Euler, και σε αυτό υπεισέρχονται οι εναπομείναντες συνεκτικοί όροι, $\Delta_j^T \bar{v}_i$, των εξισώσεων κίνησης. Για τον υπολογισμό των συνιστωσών της ταχύτητας, σε αυτό το στάδιο, εφαρμόζονται η οριακή συνθήκη διατμητικής τάσης ελεύθερης επιφάνειας και οι οριακές συνθήκες πυθμένα.

Σύμφωνα με το υβριδικό σχήμα της χωρικής διακριτοποίησης, κάθε μεταβλητή της ροής \bar{f} (ταχύτητες και πίεση) προσεγγίζεται ως

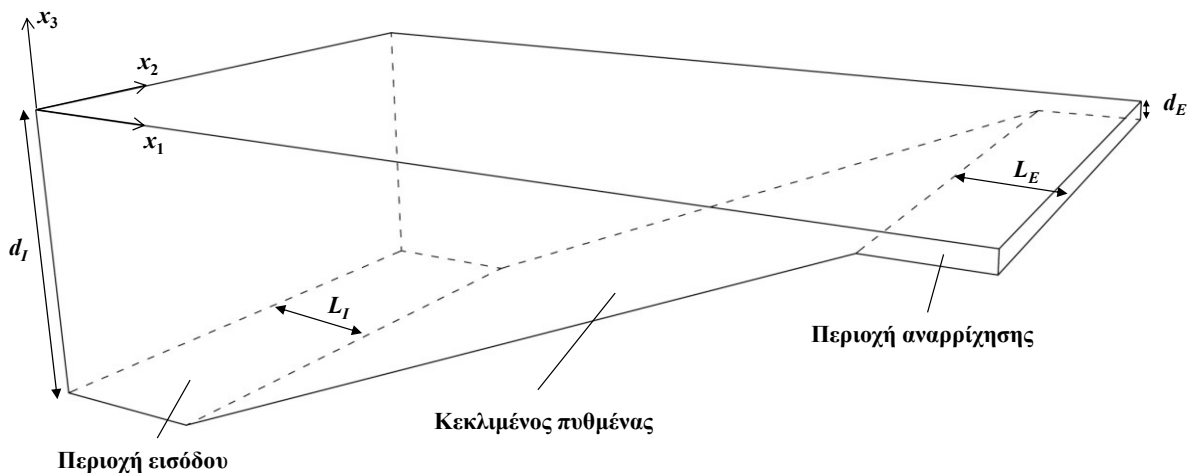
$$\bar{f}(s_1, s_2, s_3, t) = \sum_{m=-M/2}^{M/2-1} \sum_{n=0}^N \tilde{f}_{mn}(s_1, t) \cdot \exp\left(-2\pi i \frac{ms_2}{L_2}\right) T_n(s_3) \quad (4.2)$$

όπου \tilde{f}_{mn} είναι η μετασχηματισμένη κατά Chebyshev-Fourier μεταβλητή \bar{f} , M είναι ο αριθμός των σημείων Fourier, $L_2 = M \cdot \Delta_2$ είναι το μήκος του υπολογιστικού πεδίου κατά s_2 , και T_n είναι το πολυώνυμο Chebyshev μέγιστης τάξης N . Οι μετασχηματισμοί μεταξύ πραγματικού και φασματικού πεδίου γίνονται με χρήση του αλγορίθμου Fast Fourier Transform (Press et al., 1992).

Η διακριτοποίηση της (4.1) με εφαρμογή της (4.2) οδηγεί στο σχηματισμό ενός συστήματος αλγεβρικών εξισώσεων για καθεμία από τις μετασχηματισμένες μεταβλητές της ροής με τη γενική μορφή $[A] \times [\tilde{f}] = [\tilde{b}]$. Καθένα από αυτά τα συστήματα δύναται να διαιρεθεί σε M υποσυστήματα (της μορφής $[A_m] \times [\tilde{f}_m] = [\tilde{b}_m]$, ένα για κάθε κόμβο Fourier), τα οποία μπορούν να επιλυθούν παράλληλα, αφού δεν αλληλεξαρτώνται. Η επίλυση κάθε υποσυστήματος γίνεται με χρήση μιας επαναληπτικής μεθόδου, γενίκευση της μεθόδου Gauss-Seidel, σε κάθε χρονικό βήμα. Ο πίνακας των συντελεστών $[A_m]$ είναι ένας περιορισμένου εύρους διαγώνιος πίνακας, ο οποίος διασπάται μία φορά με την έναρξη της χρονικής ολοκλήρωσης με χρήση της μεθόδου διάσπασης LU.

Στην παρούσα εργασία, γίνεται προσομοίωση της διάδοσης θραυόμενων κυμάτων Stokes 2^{ης} τάξης, πάνω από πυθμένα σταθερής κλίσης. Όπως φαίνεται στο σκαρίφημα του υπολογιστικού πεδίου (Σχήμα 2), ένα οριζόντιο τμήμα μήκους L_I και βάθους d_I , προηγείται

του κεκλιμένου τμήματος του πυθμένα, εξασφαλίζοντας την ομαλή εισροή των κυμάτων. Στην περιοχή αναρρίχησης, η οποία ακολουθεί το κεκλιμένο τμήμα και έχει μήκος L_E , ο πυθμένας θεωρείται επίσης οριζόντιος με βάθος $d_E \ll d_I$. Η θεώρηση αυτή γίνεται εξαιτίας του χρησιμοποιούμενου μετασχηματισμού των εξισώσεων ροής, ο οποίος δεν επιτρέπει το μηδενισμό του βάθους ροής. Εντός της περιοχής αναρρίχησης περιλαμβάνονται δύο επικαλυπτόμενες ζώνες: μία ζώνη απορρόφησης κυμάτων, μήκους $L_A \approx L_E$, για την ελαχιστοποίηση της ανάκλασης κυμάτων από το όριο εξόδου (Dimas & Dimakopoulos, 2009), και μία ζώνη σταδιακής μείωσης της ταχύτητας (ή αλλιώς ζώνη επιβράδυνσης της ροής), μήκους L_D , ώστε να αποτραπεί η απώλεια μάζας νερού από το όριο εξόδου. Εντός της τελευταίας, γίνεται χρήση μειωμένης τιμής του Re_d , η οποία αντιστοιχεί σε αυξημένη τιμή του κινηματικού ιξώδους, κατά την επίλυση των μετασχηματισμένων εξισώσεων (4.1).



Σχήμα 2: Σκαρίφημα του υπολογιστικού πεδίου ροής.

5. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

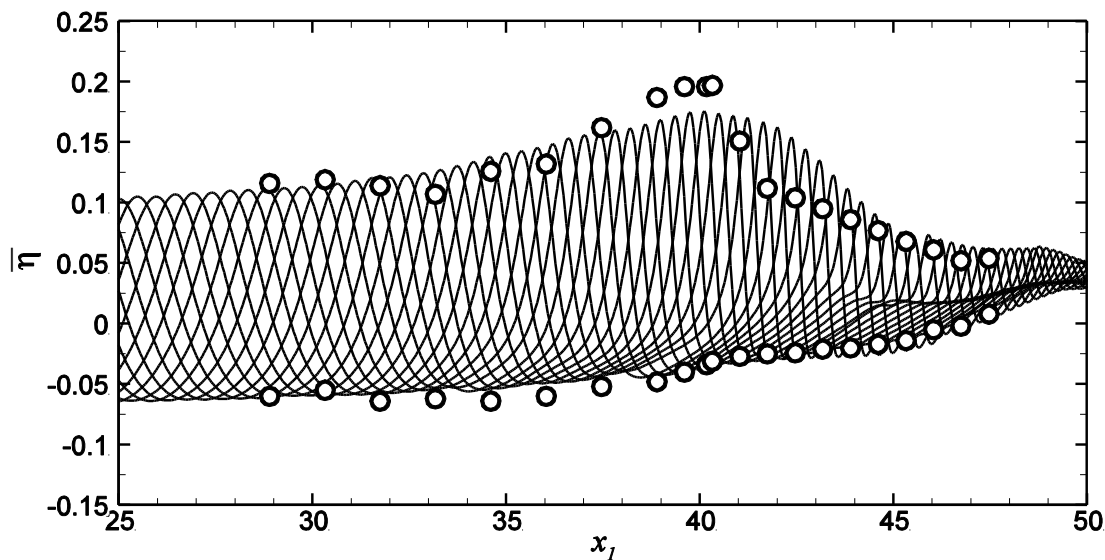
Η επαλήθευση της μεθοδολογίας LWS εφαρμοζόμενη σε σύζευξη με τις εξισώσεις Euler για την περίπτωση μη-συνεκτικής ροής, από την οποία προέκυψε και η βαθμονόμηση της παραμέτρου, C^l , του μοντέλου των SGS τάσεων κύματος, πραγματοποιήθηκε από τους Dimakopoulos & Dimas (2011). Η τιμή στην οποία κατέληξαν για την παρουσίαση των αποτελεσμάτων της προσομοίωσης τους, είναι $C^l = 0.4$ και προήλθε από σύγκριση αυτών με αντίστοιχες πειραματικές μετρήσεις των Ting & Kirby (1994, 1996) για την περίπτωση κάθετης, ως προς την ακτογραμμή, διάδοσης θραυόμενου κύματος πάνω από πυθμένα σταθερής κλίσης $\tan\beta = 1/35$.

Στην παρούσα εργασία, εξετάζεται η ακρίβεια της μεθοδολογίας LWS, η οποία πλέον συνδυάζεται με τις εξισώσεις Navier-Stokes, μέσω αριθμητικής προσομοίωσης της ίδιας περίπτωσης διάδοσης κυμάτων. Γίνεται, επίσης, σύγκριση των αποτελεσμάτων των αριθμητικών προσομοιώσεων με τις πειραματικές μετρήσεις που διενήργησαν οι Ting & Kirby (1994), ενώ θεωρείται τιμή της παραμέτρου του μοντέλου $C^l = 0.4$.

Οι παράμετροι ροής των πειραμάτων (Ting & Kirby, 1994) που αφορούσαν την περίπτωση θραύσης εκχείλισης ελλειπτικών κυμάτων, συνοψίζονται στις εξής: βάθος εισόδου κυμάτων $d_I = 0.4$ m, ύψος και περίοδος κύματος $H_I = 0.125$ m και $T = 2$ s, αντίστοιχα, οι οποίες αντιστοιχούν σε ύψος και μήκος κύματος μεγάλου βάθους $H_o = 0.127$ m και $\lambda_o = 6.245$ m, αντίστοιχα. Στην παρούσα εργασία εξετάζεται η περίπτωση κυμάτων με τις προαναφερόμενες παραμέτρους μεγάλου βάθους, ενώ το βάθος εισόδου θεωρείται $d_I = 0.7$ m, ώστε να μπορεί να εφαρμοστεί η θεωρία κυμάτων Stokes για το εισερχόμενο, στο πεδίο ροής, κύμα. Στο συγκεκριμένο βάθος, το ύψος κύματος προκύπτει ίσο με $H_I = 0.118$ m. Κάνοντας

χρήση των μεγεθών g , d_I , προκύπτουν οι αδιαστατοποιημένες τιμές των παραμέτρων εισερχόμενου κύματος, $H_I = 0.168$, $T = 7.487$ και $\lambda_o = 6.605$. Επίσης, θεωρείται αριθμός Reynolds $Re_d = 250000$, ενώ εντός της ζώνης αναρρίχησης χρησιμοποιείται τιμή 100 φορές μικρότερη αυτής. Ο αριθμός Iribaren είναι $\xi_o = \tan\beta(\lambda_o/H_o)^{0.5} = 0.2$ και αντιστοιχεί σε θραύση εκχείλισης μέσης έντασης. Το συνολικό μήκος του υπολογιστικού πεδίου είναι $L = 52$, το οριζόντιο τμήμα του πυθμένα έχει μήκος $L_I = 15$ και η περιοχή αναρρίχησης έχει μήκος $L_E = 3.05$ και βάθος $d_E = 0.03$. Η ζώνη απορρόφησης κυμάτων και η ζώνη επιβράδυνσης έχουν μήκη $L_A = 3$ και $L_D = 2$, αντίστοιχα. Οι αριθμητικές παράμετροι είναι: $\Delta_1 = 0.04$, $N = 128$, $M = 32$, $\Delta_2 = 0.02$ και $\Delta t = 10^{-4}$.

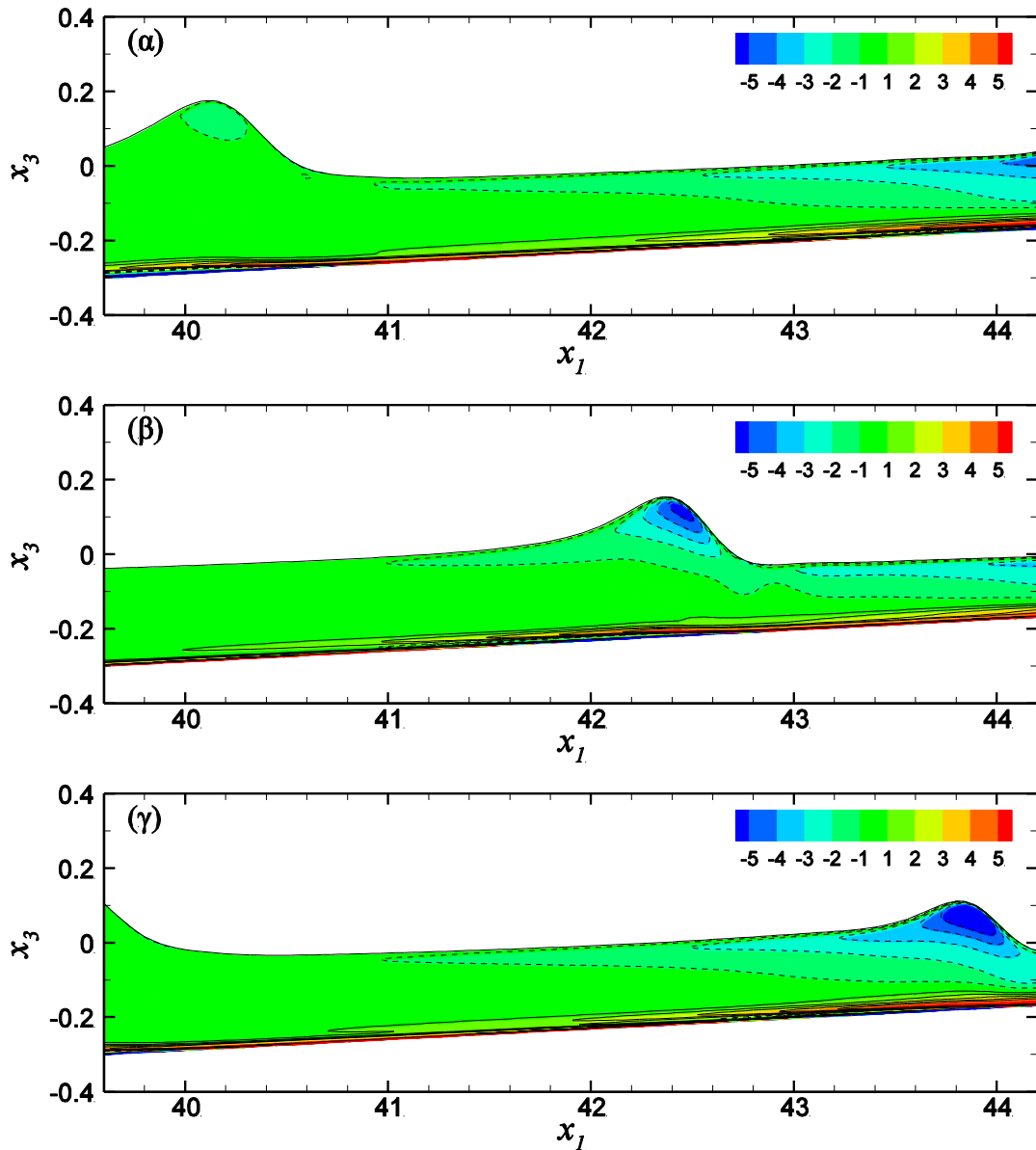
Στο Σχήμα 3 φαίνονται στιγμιότυπα της ανύψωσης της επιλυόμενης ελεύθερης επιφάνειας, μετά την πάροδο 15 περιόδων κύματος, T , τα οποία συγκρίνονται με τα αποτελέσματα των πειραματικών μετρήσεων των Ting & Kirby (1994) για τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας, δηλαδή την κορυφή και την κοιλία κύματος, αντίστοιχα. Το αριθμητικό μοντέλο προβλέπει άριστα το βάθος θραύσης του κύματος $d_b = 0.28$, το οποίο αντιστοιχεί στη θέση $x_1 \approx 40.3$, αλλά υποεκτιμά το ύψος θραύσης, όπως φαίνεται από την απόκλιση, περίπου κατά 9%, της τιμής του μοντέλου για την κορυφή στη θραύση ($\eta_b = 0.176$) και της αντίστοιχης πειραματικής μέτρησης ($\eta_b = 0.194$). Στα μεγαλύτερα βάθη της ζώνης απόσβεσης ($x_1 < 44$), το μοντέλο υποεκτιμά την απόσβεση του ύψους κύματος, αντίθετα με ότι συμβαίνει για το τμήμα της ζώνης απόσβεσης κοντά στην ακτογραμμή ($x_1 > 44$), όπου οι προβλέψεις του μοντέλου είναι πάρα πολύ καλές. Τα αριθμητικά αποτελέσματα για την περιοχή της ρήχωσης προσεγγίζουν ικανοποιητικά τις αντίστοιχες πειραματικές μετρήσεις.



Σχήμα 3: Στιγμιότυπα της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας κατά τη διάδοση κυμάτων πάνω από πυθμένα σταθερής κλίσης $\tan\beta = 1/35$. Τα σύμβολα αντιστοιχούν στις πειραματικές μετρήσεις των Ting & Kirby (1994) για την υψηλότερη και τη χαμηλότερη θέση της ελεύθερης επιφάνειας.

Τρία τυπικά στιγμιότυπα της κατανομής της αδιαστατοποιημένης στροβιλότητας ω_2 , στη ζώνη απόσβεσης, τη χρονική στιγμή της έναρξης του φαινομένου και σε χρονικά διαστήματα $\Delta t = 0.5T$ και $0.8T$ μετά τη θραύση, παρουσιάζονται στο Σχήμα 4. Με την έναρξη του φαινομένου, στην κορυφή του θραυόμενου κύματος εμφανίζεται στροβιλότητα αρνητικού πρόσημου, η οποία αντιστοιχεί σε δεξιόστροφη ανακυκλοφορία του ρευστού. Μετά τη θραύση ο επιφανειακός στρόβιλος γίνεται ακόμα πιο ισχυρός, ενώ ταυτόχρονα,

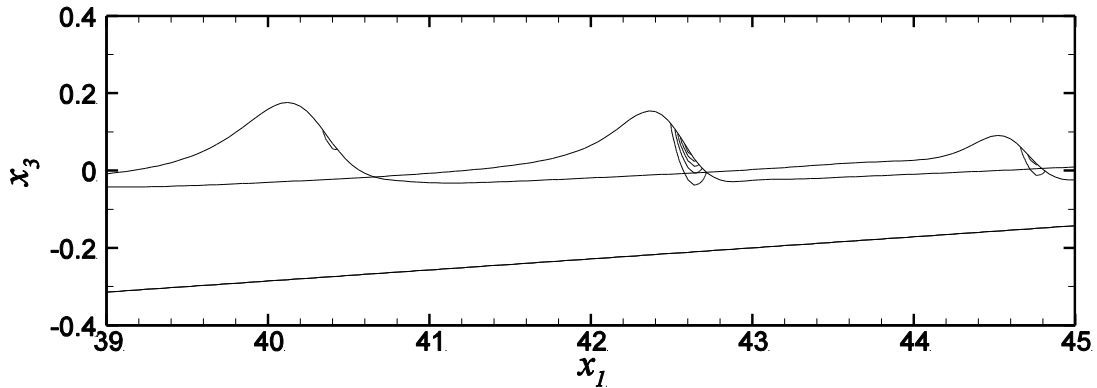
συμπαρασυρόμενος από το κύμα στη ζώνη απόσβεσης, διαχέεται στον ολόκο αυτού. Στο Σχήμα 4 φαίνονται, επίσης, η κατανομή της στροβιλότητας κοντά στον πυθμένα, η οποία οφείλεται στη διατμητική τάση που αναπτύσσεται στον πυθμένα, με μέγιστες τιμές μέχρι και 10 φορές μεγαλύτερες από αυτές της στροβιλότητας στη θραυόμενη κορυφή του κύματος.



Σχήμα 4: Στιγμιότυπα ισοϋψών του πεδίου στροβιλότητας σε μία διατομή ($x_2 = 0.32$) στη ζώνη απόσβεσης: (α) τη στιγμή έναρξης της θραύσης, (β) σε χρονικό διάστημα $\Delta t = 0.5T$ μετά τη θραύση και (γ) σε χρονικό διάστημα $\Delta t \approx 0.8T$ μετά τη θραύση.

Σύμφωνα με τη μεθοδολογία LWS, η θραύση και η απόσβεση του κύματος συνοδεύονται από την ανάπτυξη και τη συνδυασμένη δράση των SGS τάσεων δίνης και κύματος. Στο Σχήμα 5 παρουσιάζονται τυπικά στιγμιότυπα της τάσης κύματος τ_{13}^n , που είναι η μεγαλύτερη σε μέγεθος από τις SGS τάσεις, εντός της ζώνης απόσβεσης, κατά την έναρξη της θραύσης και σε χρόνο $0.5T$ αργότερα. Είναι προφανές ότι η δημιουργία του επιφανειακού στροβίλου (Σχήμα 4) συνοδεύεται από τη συνεχόμενη αύξηση του μεγέθους της τάσης τ_{13}^n στο μέτωπο του θραυόμενου κύματος. Η αύξηση αυτή συμβαίνει για χρονικό διάστημα $\Delta t =$

$0.5T$ μετά την έναρξη της θραύσης, και αντίστοιχα για το διάστημα $1 \geq d/d_b \geq 0.78$, ενώ για χρόνο μεγαλύτερο από $0.5T$ η δύναμή της εξασθενεί μέχρι μηδενισμού της. Ανάλογη συμπεριφορά επιδεικνύουν και οι υπόλοιπες SGS τάσεις εντός της ζώνης απόσβεσης (στο επίπεδο x_1 - x_3), ενώ οι τάσεις κατά τη διεύθυνση x_2 είναι κατά πολύ μικρότερες σε μέγεθος.

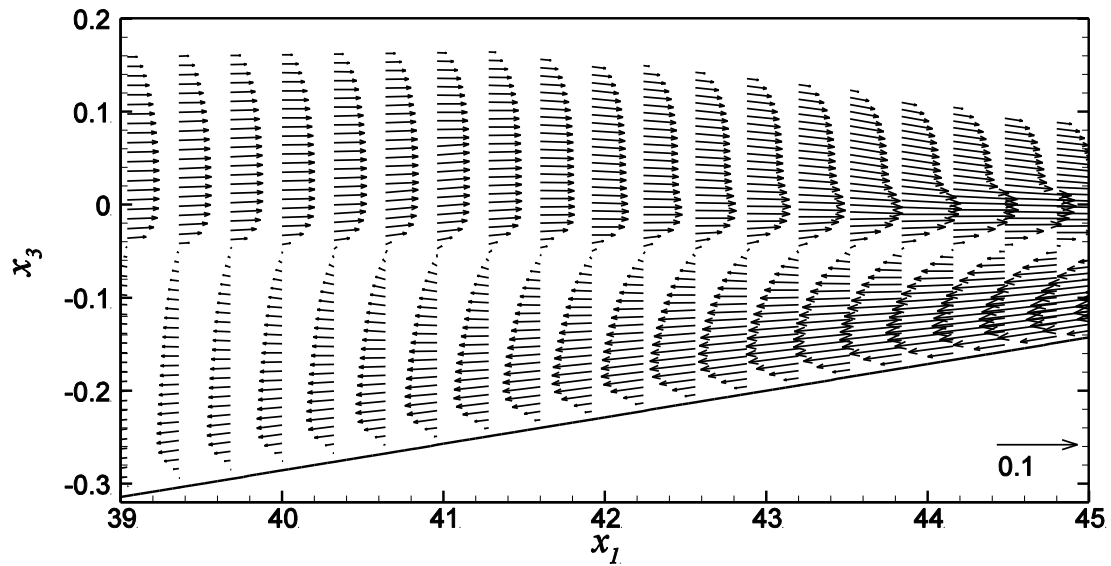


Σχήμα 5: Δύο στιγμιότυπα της SGS τάσης κύματος τ_{13}^{η} , σε μία διατομή ($x_2 = 0.32$) στη ζώνη απόσβεσης, τα οποία αντιστοιχούν στα (α) και (β) του Σχήματος 4. Το πρώτο στιγμιότυπο περιλαμβάνει δύο κορυφές (θέσεις $x_1 \approx 40$ και 44.5), ενώ οι ισοϋψείς καμπύλες σχεδιάζονται ανά διαστήματα των 0.0002 από το 0 ως το 0.001 .

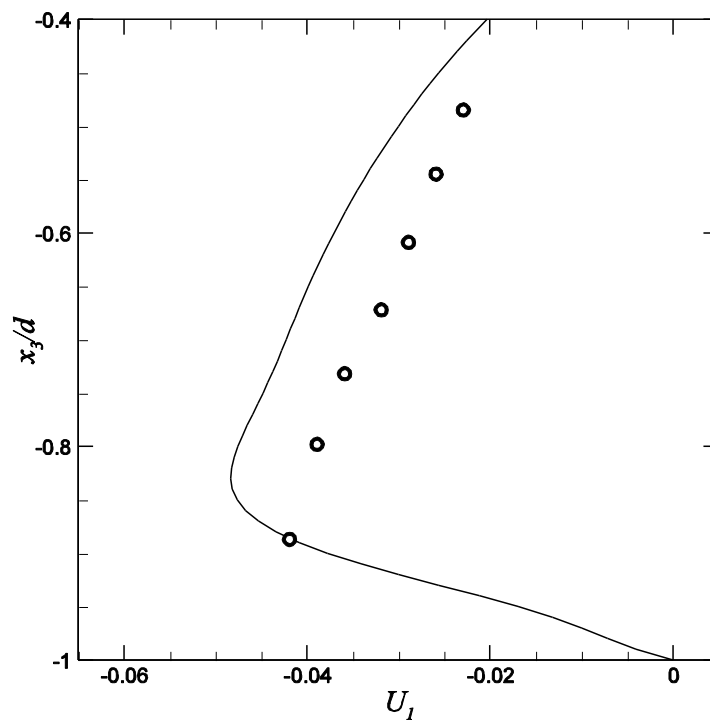
Όπως έχει προαναφερθεί στην εισαγωγή, η δημιουργία του κυματογενούς υποβρύχιου ρεύματος, που συνοδεύει τη θραύση του κύματος, εξασφαλίζει ότι η συνολική παροχή ρευστού, κατά την εγκάρσια στην ακτογραμμική διεύθυνση, είναι μηδενική. Στο Σχήμα 6 παρουσιάζεται μία τυπική κατανομή της χρονικά μέσης ταχύτητας εγκάρσια στην ακτογραμμική (για μία περίοδο κύματος) ανάντη της γραμμής θραύσης και σε τμήμα της ζώνης απόσβεσης, και είναι προφανές ότι το μοντέλο είναι σε θέση να προσομοιώσει επαρκώς το εν λόγω φαινόμενο. Στη ζώνη απόσβεσης, η κατεύθυνση της μέσης ταχύτητας είναι προς την ανοιχτή θάλασσα κοντά στον πυθμένα, και προς την ακτογραμμική κοντά στην ελεύθερη επιφάνεια, ενώ πριν τη γραμμή θραύσης η μέση ταχύτητα κοντά στον πυθμένα, αν και είναι πολύ μικρή, έχει κατεύθυνση προς αυτή. Στο Σχήμα 7, η πρόβλεψη του αριθμητικού μοντέλου για την κατακόρυφη κατανομή του υποβρύχιου ρεύματος στη θέση $x_1 = 42$, όπου $d/d_b = 0.82$, συγκρίνεται με το αντίστοιχο προφίλ που έχει προκύψει από τις μετρήσεις των Ting & Kirby (1994). Είναι προφανές ότι το μοντέλο υπερεκτιμά την ισχύ του υποβρύχιου ρεύματος, με τη μέγιστη απόκλιση να είναι περίπου 20% σε σχέση με τις μετρήσεις. Επίσης, η θέση του μεγίστου της καμπύλης της αριθμητικής προσομοίωσης βρίσκεται σε μικρότερο βάθος σε σχέση με την αντίστοιχη των μετρήσεων, γεγονός που αποδίδεται στη διαφορά της χρησιμοποιούμενης τιμής Re_d του μοντέλου και των μετρήσεων, με την πρώτη να είναι 7 φορές μικρότερη της δεύτερης.

6. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην παρούσα εργασία παρουσιάζεται ένα αριθμητικό μοντέλο για την προσομοίωση της διάδοσης και θραύσης κυμάτων πάνω από πυθμένα σταθερής κλίσης στην παράκτια ζώνη. Το μοντέλο περιλαμβάνει σύζευξη της μεθόδου προσομοίωσης μεγάλων κυμάτων (LWS) με την αριθμητική επίλυση των εξισώσεων Navier-Stokes. Με τη μεθοδολογία LWS, στο μοντέλο εισάγονται οι υποπλεγματικές (SGS) τάσεις κύματος και δίνης, οι οποίες υποβοηθούν τη θραύση και την απόσβεση της ενέργειας του θραυόμενου κύματος. Σε γενικές



Σχήμα 6: Κατανομή της μέσης ταχύτητας (υποβρύχιο ρεύμα) εγκάρσια στην ακτογραμμή, για μία περίοδο κύματος T , σε μία διατομή ($x_2 = 0.32$) στη ζώνη απόσβεσης.



Σχήμα 7: Κατακόρυφη κατανομή της μέσης οριζόντιας ταχύτητας (υποβρύχιο ρεύμα), σε μία διατομή ($x_2 = 0.32$) στη θέση $x_1 = 42$ (κατάντη της γραμμής θραύσης). Τα σύμβολα αντιστοιχούν στις πειραματικές μετρήσεις των Ting & Kirby (1994).

γραμμές, οι προβλέψεις του μοντέλου για τα χαρακτηριστικά της θραύσης και την απόσβεση του κύματος κρίνονται ικανοποιητικές, ύστερα από σύγκριση στιγμιότυπων της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας με σχετικά αποτελέσματα πειραματικών μετρήσεων (Ting & Kirby, 1994). Η ανάπτυξη του επιφανειακού στροβίλου στην κορυφή του θραυόμενου κύματος συνοδεύεται από αύξηση της ισχύος των SGS τάσεων αλλά και διαδοχική μείωση τους (μέχρι μηδενισμού) στα ρηχά της ζώνης απόσβεσης. Η κατανομή της μέσης, ανά περίοδο κύματος,

ταχύτητας εγκάρσια ως προς την ακτογραμμή, που προκύπτει από την προσομοίωση, αποτυπώνει επαρκώς τα ποιοτικά χαρακτηριστικά του, δημιουργούμενου εξαιτίας της θραύσης, υποβρύχιου ρεύματος (undertow current). Η ποσοτική επαλήθευση της ισχύος του υποβρύχιου ρεύματος προκύπτει από τη σύγκριση του προφίλ της οριζόντιας ταχύτητας (εγκάρσια στην ακτογραμμή) σε συγκεκριμένη θέση, με το αντίστοιχο που έχει μετρηθεί από τους Ting & Kirby (1994).

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Ευχαριστούμε την Επιτροπή Ερευνών (ΕΛΚΕ) του Πανεπιστημίου Πατρών, και ειδικότερα το Πρόγραμμα Κ. ΚΑΡΑΘΕΟΔΩΡΗ, για την χρηματοδότηση του ανωτέρω έργου.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Δημακόπουλος, Α. 2009. *Αριθμητική Προσομοίωση της Τρισδιάστατης Τυρβώδους Ροής Θραυόμενων Κυμάτων στην Παράκτια Ζώνη*. Διδακτορική Διατριβή, Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών, Πανεπιστήμιο Πατρών, 134 σελ.
- Dimakopoulos, A.S. and Dimas, A.A. 2011. *Large-wave simulation of three-dimensional, cross-shore and oblique, spilling breaking on constant slope beach*. Coastal Engineering, 58: 790-801.
- Dimas, A.A. and Dimakopoulos, A.S. 2009. *A surface-roller model for the numerical simulation of spilling wave breaking over constant slope beach*. Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering, 135(5): 235-244.
- Dimas, A.A. and Fialkowski, L.T. 2000. *Large-wave simulation (LWS) of free-surface flows developing weak spilling breaking waves*. Journal of Computational Physics, 159(2): 172–196.
- Rogallo, R.S. and Moin, P. 1984. *Numerical simulation of turbulent flows*. Annual Review of Fluid Mechanics, 16: 99-137.
- Press, W.H., Teukolsky, S.A., Vetterling, W.T. and Flannery, B.P. 1992. *Numerical Recipes in Fortran 77*. Cambridge University Press, 963 pp..
- Ting, F.C.K. and Kirby, J.T. 1994. *Observation of undertow and turbulence in a laboratory surf zone*. Coastal Engineering, 24(1-2): 51-80.
- Ting, F.C.K. and Kirby, J.T. 1996. *Dynamics of surf-zone turbulence in a spilling breaker*. Coastal Engineering, 27(3-4): 131-160.